Metrische Räume

1. Aufgabe:

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{|x + y|}{2}$$

gegeben. Skizziere $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 1\}$ und begründe, ob f eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweise für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die sogenannte **Parallelogramm-Gleichung**

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)$$

Zusatz: Durch die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei ein Parallelogramm definiert. Was bedeutet die bewiesene Gleichung geometrisch?

2. Aufgabe:

Welche der Aussagen sind **wahr**?

- ☐ Für $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ gilt $\partial A \nsubseteq A$. Damit ist A offen.
- ☐ Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p(x, y) = x^4 + 2y^2$. Die Menge $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) > 0\}$ ist offen und $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) + 1 > 0\}$ ist abgeschlossen.
- ☐ Das Innere der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ ist die leere Menge.
- ☐ Die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ z \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x = \frac{1}{z} \wedge y = \sin(x)\}$ ist beschränkt.
- ☐ Für $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt $\bar{S} = S$.

3. Aufgabe:

a) Welche der beiden Funktionen

$$f(x, y) = \cos(2\pi(x + y)) \qquad g(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi}{|x| + |y|}\right)$$

besitzt in $(0, 0)$ einen Grenzwert? Begründe deine Entscheidung!

b) Kann man

$$f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

stetig in $(0, 0)$ fortsetzen? Begründe!

Differentialrechnung

1. Aufgabe:

Sei $f(x,y) := \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a) Berechne den Gradienten ∇f auf $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$.

b) Zeige, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (1,0))$.

c) Berechne nach Definition die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(1,0)$.

d) Zeige, dass f nicht differenzierbar an der Stelle $(1,0)$ ist.

2. Aufgabe:

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) := xyz + 3xz^3$ im Punkt $P(1,2,1)$ in die Richtung $\vec{v} = (1,-2,2)$.

3. Aufgabe:

Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = ((x^2+y^2-1)x, (x^2+y^2-1)y)$ und gib genau die Punkte an, an denen die Jacobi-Matrix nicht invertierbar ist.

4. Aufgabe:

Bestimme die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = y^2 + xyln(x)$ und ob diese Minima oder Maxima sind.

5. Aufgabe:

Es ist $f(x,y) = e^x sin(y)$ gegeben. Sowie $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T = (sin(t), t^2)^T$. Berechne die Ableitung $f'(g_1(t), g_2(t))$ mithilfe der Kettenregel.

Lokale Approximation
Umkehrabbildung
Implizite Funktion

Lokale Approximation

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

a) Bestimme das Taylorpolynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.
Gib das dazugehörige Restglied in Lagrange-Darstellung an.

b) Schätze das Restglied für $x \in [1, 3]$ ab.

2. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$.
Bestimme die Taylorreihe für $x_0 = 0$.

Umkehrabbildung und implizite Funktion

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$.
Beweise, dass es zu jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Umgebung U von (x_0, y_0) gibt so, dass f lokal invertierbar ist.

4. Aufgabe:

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

a) Zeige, dass dieses Gleichungssystem an der Stelle $(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}})$ lokal eindeutig nach (y, z) auflösbar ist.

b) Berechne für die in **a)** implizit definierte Funktion $g(x) = (y, z)$ die Ableitung $g'(0)$.

Integrale

1. Aufgabe:

Berechne folgende bestimmte Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^\pi x\ cos(x)\ dx \qquad \text{(ii)} \int_0^\pi \sin^3(x)\ dx \qquad \text{(iii)} \int_0^\pi \tan(x)\ dx$$

Berechne die unbestimmten Integrale:

$$\text{(iv)} \int \frac{e^x}{5+e^x}\ dx \qquad \text{(v)} \int \frac{dx}{(x^2-1)(x+1)} \qquad \text{(vi)} \int \ln x\ dx$$

2. Aufgabe:

Finde per Mittelwertsatz der Integralrechnung eine gute Abschätzung nach unten und oben für den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x+1} dx$$

3. Aufgabe:

Existieren diese uneigentlichen Integrale? Wenn ja, bestimme den Wert des Integrals.

$$\text{(i)} \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)\ dx \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x^2}\ dx \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$$